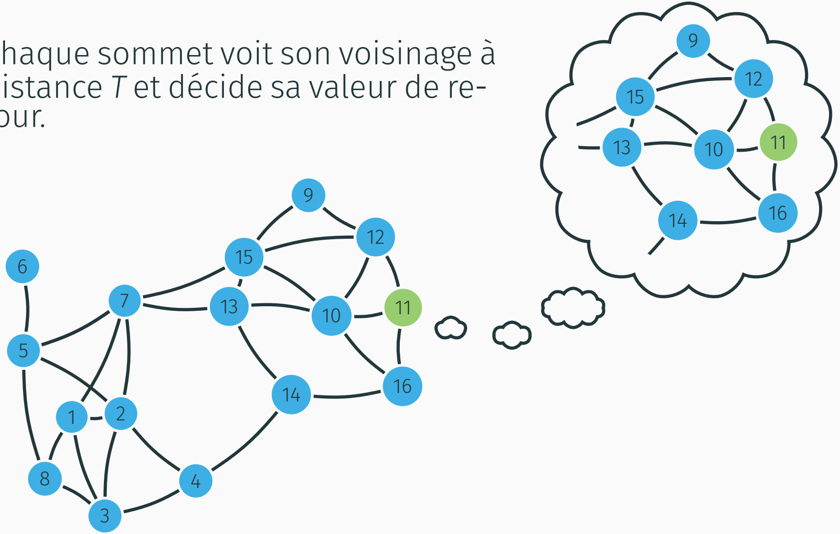
# Algorithmes distribués et dimension asymptotique

Marthe Bonamy [1] Cyril Gavoille [1] Timothé Picavet [1] Alexandra Wesolek [2]

[1]LaBRI, Bordeaux

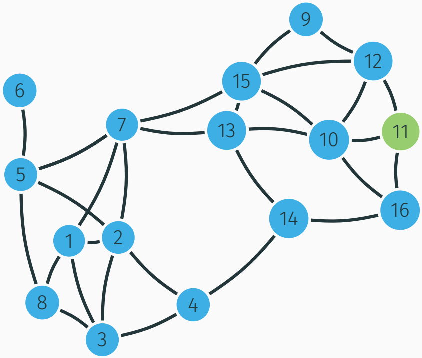
[2]TU Berlin

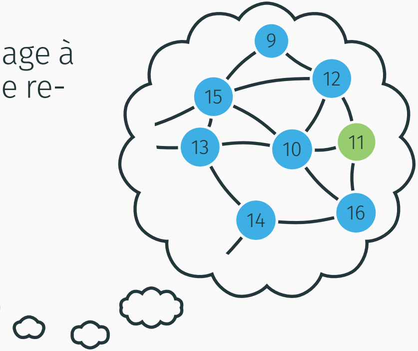
Chaque sommet voit son voisinage à distance $T$ et décide sa valeur de retour.



# Algorithmes LOCAL

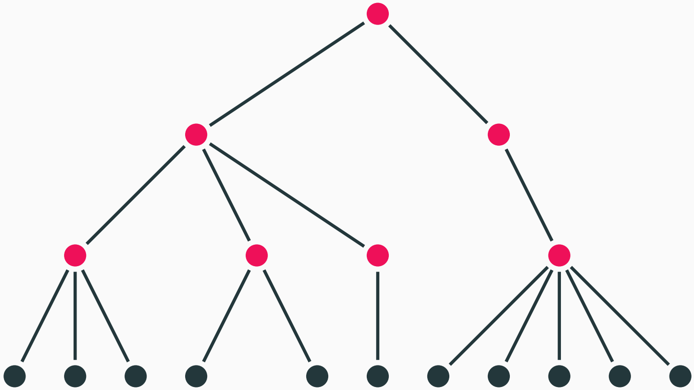
Chaque sommet voit son voisinage à distance $T$ et décide sa valeur de retour.



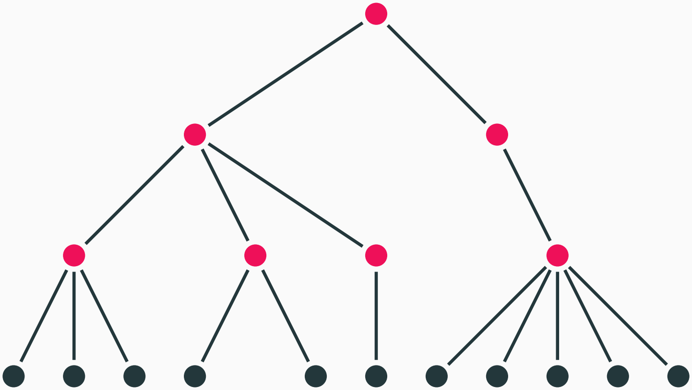




$$\text{Algo} = \mathcal{A} : \begin{array}{c}\text{voisinage à}\\ \text{distance T}\end{array} \mapsto \begin{array}{c}\text{valeur de}\\ \text{retour locale}\end{array}$$

# Exemple 1: les arbres



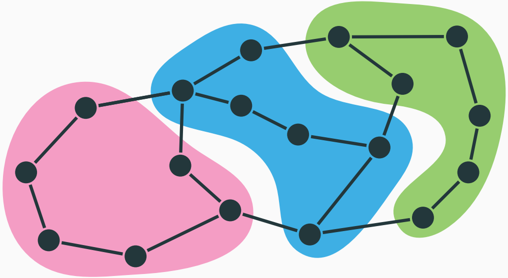
# Exemple 1: les arbres



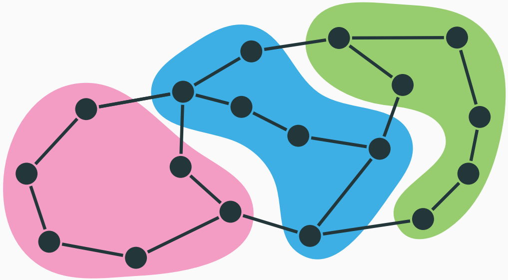
**Theorem**

$|\{v \in V(T) \mid \mathrm{d}(v) \geq 2\}| \leq 3 \cdot \mathrm{MDS}(T)$

# Exemple 2: les graphes de grande maille



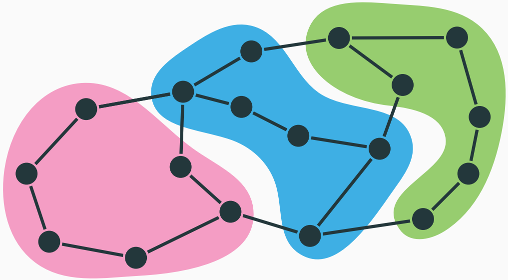
Réutiliser l'analyse des arbres ?



## Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate

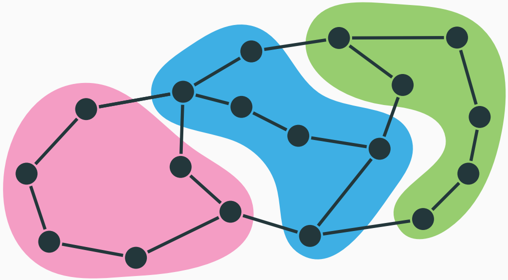
# Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate
- Diamètre $\leq$ maille

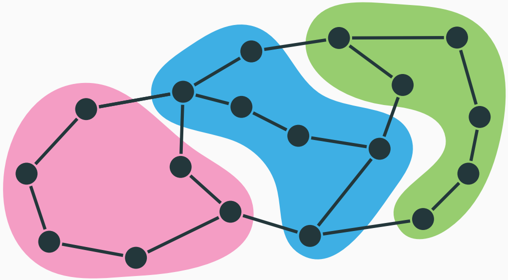
# Exemple 2: les graphes de grande maille



## Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate
- Diamètre $\leq$ maille
- Espacement entre mêmes couleurs $\implies$ en parallèle

# Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate
- Diamètre $\leq$ maille
- Espacement entre mêmes couleurs $\implies$ en parallèle
- Nombre fini de couleurs

Dimension asymptotique $= d$ si $\forall r, \exists C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G)), \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

# Dimension asymptotique

Dimension asymptotique $= d$ si $\forall r, \exists C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G)), \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

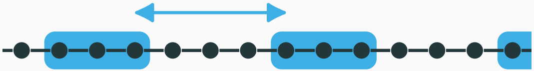
- **Couverture:** $V(G) = \bigcup_i \bigcup_{B \in C_i} B$

# Dimension asymptotique

Dimension asymptotique $= d$ si $\forall r, \exists C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G)), \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

- **Couverture:** $V(G) = \bigcup_i \bigcup_{B \in C_i} B$

- **Disjointude:** $\forall B, B' \in C_i$ distincts, $\mathbf{dist}(B, B') > r$

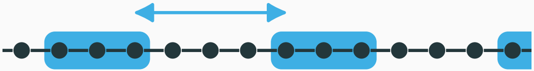


# Dimension asymptotique

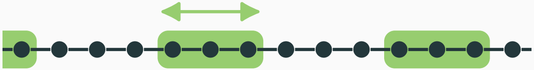
Dimension asymptotique $= d$ si $\forall r, \exists C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G)), \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

- **Couverture:** $V(G) = \bigcup_i \bigcup_{B \in C_i} B$

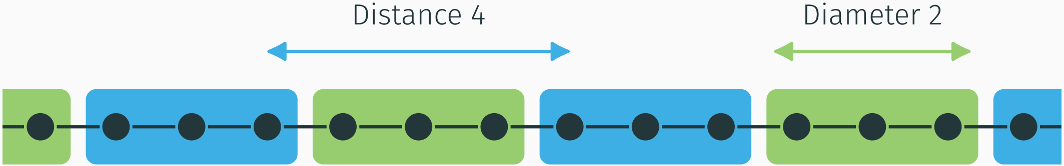
- **Disjointude:** $\forall B, B' \in C_i$ distincts, $\mathbf{dist}(B, B') > r$



- **Bornitude:** $\forall B \in C_i$, $\mathbf{diam}_G(B) \leq f(r)$

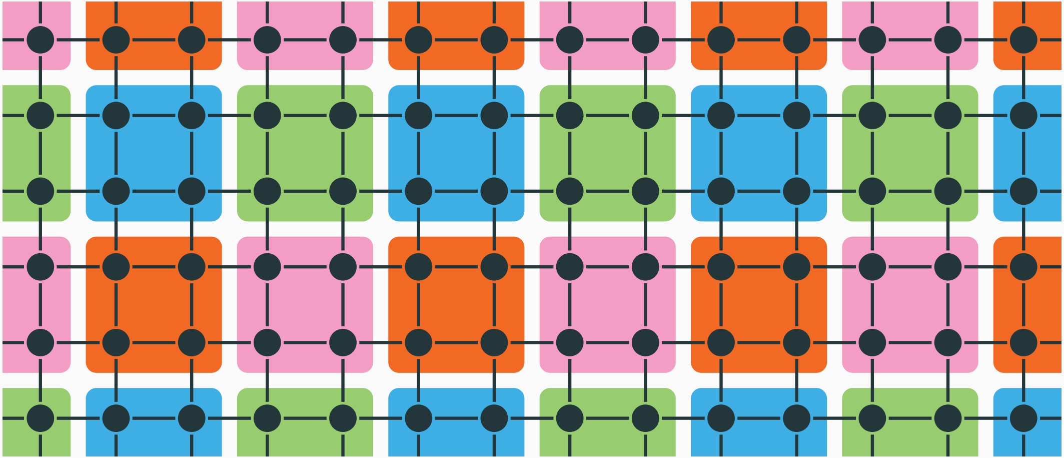


# Exemple 1: le chemin



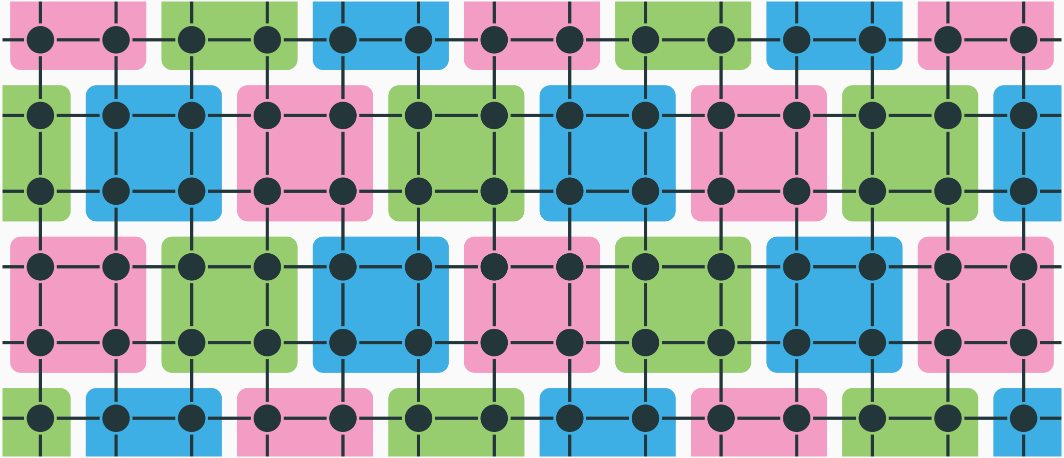

$$\text{Dimension} = 1$$

# Exemple 2: la grille – essai 1



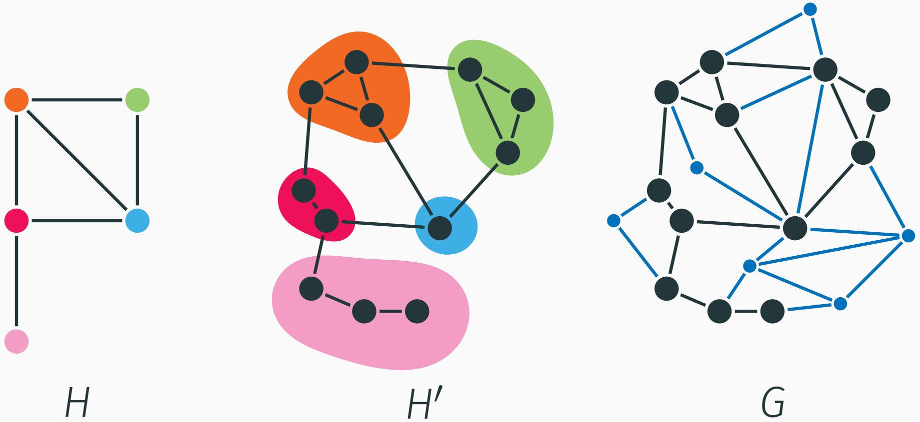
Dimension $\leq 3$

# Exemple 2: la grille – essai 2



Dimension $= 2$ !

# Mineurs de graphes




$H$ est un mineur de $G$

# Dimension asymptotique et mineurs de graphes

**Theorem (Bonamy, Bousquet, Esperet, Groenland, Liu, Pirot, Scott, 2020)**

*Toute classe interdisant un mineur a dimension asymptotique* $\leq 2$.

# Application: algorithmique distribuée

Comment utiliser la théorie des graphes en algorithmique distribuée ?

Comment utiliser la théorie des graphes en algorithmique distribuée ?

Concept global

$\downarrow$

Concept local

## Application: algorithmique distribuée

Comment utiliser la théorie des graphes en algorithmique distribuée ?

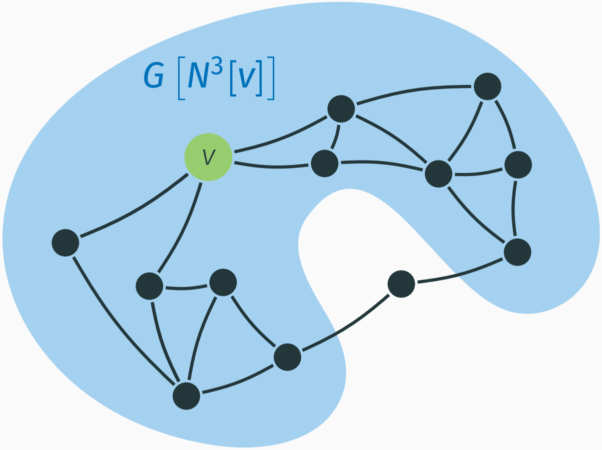
Concept global

$\downarrow$

Concept local

**Définition**

$v$ est un *cutvertex* *r-local* si $v$ est un cutvertex de $G[N^r[v]]$.



# Cutvertices locaux

**Theorem**

*Pour tout graphe $G$, #cutvertices* $\leq 3\,\mathrm{MDS}(G)$.

$$\Downarrow$$

**Theorem**

*Soit $\mathcal{C}$ de dimension asymptotique $d$.*

*Alors $\forall r \geq r(\mathcal{C})$, #cutvertices **r-local*** $\leq 3(\boldsymbol{d}+1)\,\mathrm{MDS}(G)$.

# Cutvertices locaux

**Theorem**

*Pour tout graphe $G$ et $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$, #cutvertices $\in \boldsymbol{S} \leq 3\,\mathrm{MDS}(G, \boldsymbol{N}[S])$.*

$$\Downarrow$$

**Theorem**

*Soit $\mathcal{C}$ de dimension asymptotique $d$.*

*Alors $\forall r \geq r(\mathcal{C})$, #cutvertices* ***r-local*** $\leq 3(\boldsymbol{d}+1)\,\mathrm{MDS}(G)$.

# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$
pour $r = 5$.

# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$
pour $r = 5$.
Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$
pour $r = 5$.

Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

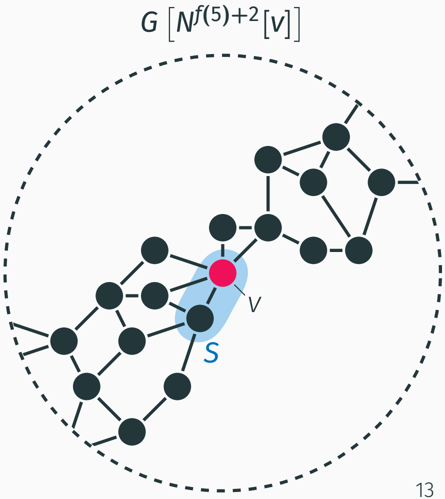
$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$-local.

# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \dots, C_{d+1}$ pour $r = 5$.

Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5)+2)$-local.



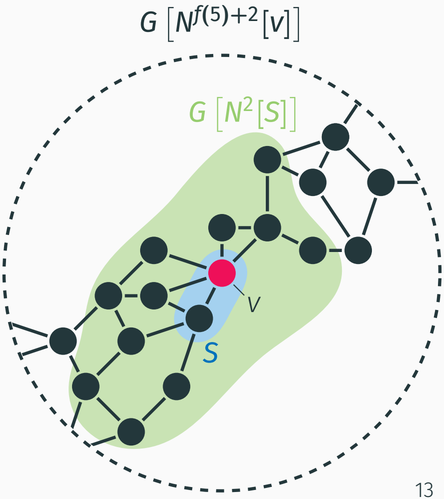
# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$ pour $r = 5$.

Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5)+2)$-local.

**Claim:** $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.



# Preuve

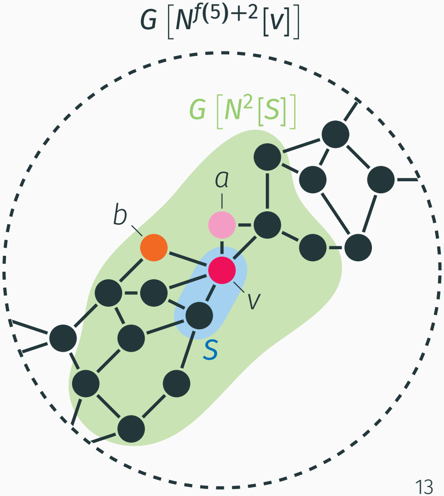
Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \dots, C_{d+1}$ pour $r = 5$.

Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$-local.

**Claim:** $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.

**Claim:** $v$ est un cutvertex de $G[N^2[S]]$ (sépare $a$ de $b$).



# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$ pour $r = 5$.

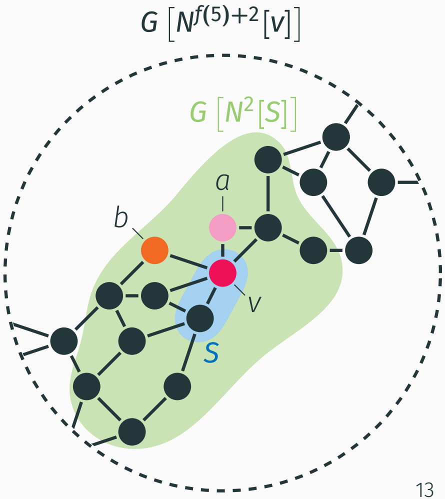
Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5)+2)$-local.

**Claim:** $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.

**Claim:** $v$ est un cutvertex de $G[N^2[S]]$ (sépare $a$ de $b$).

**Claim:** $\#$cutvertex in $S \leq 3\,\mathrm{MDS}(G[N^2[S]], N[S]) \leq 3\,\mathrm{MDS}(G, N[S])$.



# Preuve

Dimension $d$, fonction $f$: ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$ pour $r = 5$.

Soit $S$ de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5)+2)$-local.

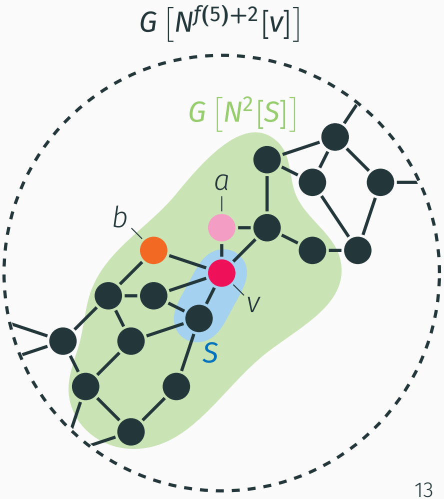
**Claim:** $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.

**Claim:** $v$ est un cutvertex de $G[N^2[S]]$ (sépare $a$ de $b$).

**Claim:** $\#$cutvertex in $S \leq 3\,\mathrm{MDS}(G[N^2[S]], N[S]) \leq 3\,\mathrm{MDS}(G, N[S])$.

$$\Downarrow$$

$$\#\text{cutvertex } (f(5)+2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{S \in C_i} 3 \cdot \mathrm{MDS}(G, N[S])$$



# Fin de preuve

$$\#\text{cutvertex } (f(5)+2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{S \in C_i} 3 \cdot \mathsf{MDS}(G, \underbrace{N[S]}_{\text{à distance } 3})$$

# Fin de preuve

$$\#\text{cutvertex } (f(5)+2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{S \in C_i} 3 \cdot \mathrm{MDS}(G, \underbrace{N[S]}_{\text{à distance } 3})$$

$(N^2[S]$ sont disjoints)

$$\#\text{cutvertex } (f(5)+2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} 3 \cdot \mathrm{MDS}(G) = 3(d+1) \cdot \mathrm{MDS}(G).$$

# Applications: 2-cuts locaux

**Theorem**

*Soit $\mathcal{C}$ de dimension asymptotique $d$.*

*Alors $\exists r = r(\mathcal{C}), \#\text{sommets} \in 2\text{-cut } r\text{-local} \leq 8(d+1)\,\mathrm{MVC}(G)$.*

# Applications: approximations sur les localement-$\mathcal{C}$

## Theorem

*S'il existe un algorithme LOCAL:*

- $\alpha$*-approximation de MDS*
- *sur* $\mathcal{C}$
- *en temps constant r*
- *+ condition technique*

# Applications: approximations sur les localement-$\mathcal{C}$

**Theorem**

*S'il existe un algorithme LOCAL:*

- $\alpha$*-approximation de MDS*
- *sur* $\mathcal{C}$
- *en temps constant* $r$
- *+ condition technique*

*et si* $\mathcal{D}$ *est:*

- $\Omega(r)$*-localement* $\mathcal{C}$
- *de dimension asymptotique* $d$

# Applications: approximations sur les localement-$\mathcal{C}$

**Theorem**

*S'il existe un algorithme LOCAL:*

- $\alpha$*-approximation de MDS*
- *sur* $\mathcal{C}$
- *en temps constant r*
- *+ condition technique*

*et si* $\mathcal{D}$ *est:*

- $\Omega(r)$*-localement* $\mathcal{C}$
- *de dimension asymptotique d*

*alors il existe une* $\alpha(\boldsymbol{d}+1)$*-approximation locale de MDS sur* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *en temps r.*

# Applications: MDS dans le modèle LOCAL

**Theorem**

*Sur graphes sans le mineur $K_{2,t}$, il existe une $\mathcal{O}(1)$-approximation (où la constante est **indépendante de t**) de Minimum Dominating Set dans le modèle LOCAL, en $f(t)$ rondes.*

# Applications: MDS dans le modèle LOCAL

**Theorem**

*Sur graphes sans le mineur $K_{2,t}$, il existe une $\mathcal{O}(1)$-approximation (où la constante est* ***indépendante de t****) de Minimum Dominating Set dans le modèle LOCAL, en $f(t)$ rondes.*

Ancienne borne sur les classes sans mineur $K_{3,t}$: $(2+\varepsilon)\cdot(t+4)$ en $g(\varepsilon,t)$ rondes (Heydt, Kublenz, Ossona de Mendez, Siebertz, Vigny 2022).

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

- Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

- Appliquer la dimension asymptotique

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

- Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

- Appliquer la dimension asymptotique

$$\text{Dimension asymptotique} \rightarrow \text{ensemble de petit diamètre } S$$

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

- Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

- Appliquer la dimension asymptotique

$$\text{Dimension asymptotique} \rightarrow \text{ensemble de petit diamètre } S$$
$$\text{cutvertex local} \in S \implies \text{cutvertex dans } G[S]$$

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

- Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

- Appliquer la dimension asymptotique

$$\text{Dimension asymptotique} \rightarrow \text{ensemble de petit diamètre } S$$
$$\text{cutvertex local} \in S \implies \text{cutvertex dans } G[S]$$
$$\text{Union bound pour conclure}$$

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

- Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

- Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique $\rightarrow$ ensemble de petit diamètre $S$

cutvertex local $\in S \implies$ cutvertex dans $G[S]$

Union bound pour conclure 😁

- Sans mineur $H \rightarrow \mathcal{O}(\text{pw}(H))$-approximation locale en temps constant ?

# Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

- Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles $S$:

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot MDS(G, N[S])$$

- Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique $\rightarrow$ ensemble de petit diamètre $S$

cutvertex local $\in S \implies$ cutvertex dans $G[S]$

Union bound pour conclure

- Sans mineur $H \rightarrow \mathcal{O}(\mathrm{pw}(H))$-approximation locale en temps constant ?

Merci !